

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

# **ELASTICIDADE**

## **Volume V**

### **“Conceitos Gerais”**

**Leandro Bertoldo**

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

## **Dedicatória**

Dedico este livro à minha amada mãe  
**Anita Leandro Bezerra**

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

**“Há poder no conhecimento de ciências de toda a espécie, e é designo de Deus que a ciência avançada seja ensinada em nossas escolas como preparação para a obra que há de preceder as cenas finais da história terrestre”.**  
**(Fundamentos da Educação Cristã, 186).**

**Ellen Gould White**  
**Escritora, conferencista, conselheira,**  
**e educadora norte-americana.**  
**(1827-1915)**

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

# Sumário

**Dados biográficos**

**Prefácio**

**Capítulo I: Introdução Geral à Elasticidade**

**Capítulo II: Dinamismo Elástico**

**Capítulo III: Força de Rigidez**

**Capítulo IV: Geometria da Elasticidade**

**Capítulo V: Fisiolasticidade**

**Capítulo VI: Campo Elástico**

**Capítulo VII: Barolástica**

**Capítulo VIII: Reostatos Dinamoscópicos**

**Capítulo IX: Movimento Uniforme dos Reostatos**

**Capítulo X: Movimento Variado dos Reostatos**

**Capítulo XI: Introdução à Dissipalidade**

**Capítulo XII: Noção de Forças Dissipadas**

**Capítulo XIII: Noção de Semielásticos**

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

## Dados biográficos

Leandro Bertoldo é o primeiro filho do casal José Bertoldo Sobrinho e Anita Leandro Bezerra. Tem um irmão chamado Francisco Leandro Bertoldo. Os dois seguiram a carreira no judiciário paulista, incentivados pelo pai, que via algo de desejável na estabilidade do serviço público.

Leandro fez as faculdades de Física e de Direito na Universidade de Mogi das Cruzes – UMC. Seu interesse sempre crescente pela área das exatas vem desde os seus 17 anos, quando começou a escrever algumas teses sérias a respeito do assunto. Em 1995, publicou o seu primeiro livro de Física, que foi um grande sucesso entre os professores universitários. O seu comprometimento com o Direito é resultado de suas atividades junto ao Tribunal de Justiça do Estado de São Paulo.

Leandro casou-se duas vezes e teve uma linda filha do primeiro matrimônio chamada Beatriz Maciel Bertoldo. Sua segunda esposa Daisy Menezes Bertoldo tem sido sua grande companheira e amiga inseparável de todas as horas. Muitas de suas alegrias são proporcionadas pelos seus amados cachorros: Fofa, Pitucha, Calma e Mimo.

Durante sua carreira como cientista contabilizou centenas de artigos e dezenas de livros, todos defendendo teses originais em Física e Matemática, destacando-se: “Teoria Matemática e Mecânica do Dinamismo” (2002); “Teses da Física Clássica e Moderna” (2003); “Cálculo Seguimental” (2005); “Artigos Matemáticos” (2006) e “Geometria Leandroniana” (2007), os quais estão sendo discutidos por vários grupos de pesquisas avançadas nas grandes universidades do país.

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

## Prefácio

**E**lasticidade é a primeira obra exaustiva e de natureza sistemática produzida *ab ovo* pelo autor no período de 1978 a 1980. Trata-se de um livro de fôlego, constituído por mais de mil páginas, que foram distribuídas em cinco volumes.

O livro encontra-se inteiramente estruturado no método científico, especialmente pela análise matemática. Partindo de poucos princípios, o livro cresceu alimentando-se do método da analogia com os diversos ramos da Física Clássica.

O manuscrito original desta obra apresenta uma letra bem delineada, bastante caprichada, clara e limpa. Naquela época o autor era um intelectual vanguardista bastante jovem e orgulhoso, que contava apenas 19 anos de idade. Ainda estudante colegial, aplicava-se com afinco à leitura de Descartes, Locke, Rousseau, Voltaire, Leibniz, Galileu, Newton, Einstein etc. Além disso, dedicava todo seu tempo livre na elaboração de profundas pesquisas científicas em física. Somente a juventude do autor poderia permitir a introdução de conceitos inovadores e de ideias inusitadas no campo da Física Clássica, como se pode constatar nesta obra.

Na falta de um nome apropriado para designar as novas leis, fórmulas e conceitos, provisoriamente, lancei mão do nome que estava mais acessível naquele momento: “Leandro”. Entretanto, tal nome poderá ser substituído por outra designação mais adequada, que a ciência achar conveniente.

O próprio título da obra articula bem os seus objetivos: “Elasticidade”. Ela visa realizar o estudo sistemático das propriedades das deformações elásticas e plásticas que os corpos apresentam ao serem submetidos à ação de uma intensidade de força.

O **primeiro volume** desta série é dedicado ao estudo dos princípios fundamentais envolvidos nas deformações elásticas. Nele é analisado o equilíbrio elástico, o conceito de dinamoscó-

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

pio, dinamômetros, escalas dinamométricas, quantidade elástica, tração, compressão, deformações lineares, superficiais e volumétricas e finalmente analisa a relação entre as deformações e a temperatura.

O **segundo volume** foi consagrado ao estudo dos sistemas e instrumentos de medidas elásticas, como por exemplo, os leandrometros e multímetros dinamoscópico, bem como o estudo das pontes elásticas, associações em série e em paralelo de corpos dinamoscópicos.

O **terceiro volume** desta série é destinado ao estudo das grandezas físicas da Cinemática e da Dinâmica, aplicadas às forças e às deformações elásticas dos corpos dinamoscópicos.

O **quarto volume** está voltado ao estudo das contrações e expansões laterais provocadas pelas deformações por tração e compressão linear, superficial e volumétrica.

O **quinto volume** desta série propõe estudar os corpos dinamoscópicos elásticos, semielásticos e plásticos, rigidez dinamoscópica, ponto de ruptura, conceitos geométricos aplicados na dinamoscopia, campo elástico e estudos sobre os reostatos dinamoscópicos.

Enfim, o livro é revolucionário e inovador. Ele traz em seu bojo muitas pesquisas originais e inéditas, produzidas pelo autor em sua juventude. Esta obra estabelece claramente um paradigma ao criar um novo ramo da Física Clássica: Elasticidade.

O autor folga em oferecer ao grande público leitor esta maravilhosa obra, esperando que venha a ter boa acolhida entre os homens de ciência e visionários do futuro, a fim de que o universo do nosso conhecimento continue no seu grande processo de expansão.

[leandrobortoldo@ig.com.br](mailto:leandrobortoldo@ig.com.br)

# CAPÍTULO I

## Introdução Geral à Elasticidade

### 1. Introdução

Ao iniciar o estudo da teoria elástica, é necessário entender certos conceitos básicos que são muito usados, e que procurarei desenvolver nesta primeira parte do programa.

Nesta introdução à elasticidade, apresento os conceitos de forças estáticas, acentuando simultaneamente o caráter de causa e efeito. Note que eu disse conceitos e não definições, porque existem certos conceitos básicos que não são possíveis de serem definidos e sim, dar uma ideia dos termos que estudaremos neste livro.

Na elasticidade a noção de força estática é discutida sob o ponto de vista das deformações.

A elasticidade estuda as forças cuja função é alterar as dimensões ou a forma do corpo a que ela se aplica.

### 2. Reconhecimento da Elasticidade

Suponha-se que se deseja estudar o comportamento experimental das deformações dos corpos. Considere então que esse corpo encontra-se fixo numa de suas extremidades. Assim, ao tentar aplicar uma força suficientemente intensa na outra extremidade, verificar-se-á o aparecimento de uma deformação no referido corpo. E o mesmo só voltará ao seu estado natural quando a força deixar de ser aplicada. Esse comportamento verificado experimentalmente sugere a existência de uma propriedade inerente a alguns corpos - propriedade esta, que não existe quando se trata de outros materiais - denominada elasticidade.

Assim, as experiências realizadas indicam que somente os corpos elásticos ao serem deformados, podem restituir-se ao seu estado natural, fato que não ocorre, portanto, com os corpos rígidos.

Sabendo-se então da existência de corpos elásticos e de corpos rígidos, resta apurar quais são esses corpos e como reconhecê-los. Para isso, pode-se verificar experimentalmente o reconhecimento desses corpos elásticos e rígidos, bastando aplicar o princípio que rege a elasticidade e a rigidez. Esses princípios, bastante primitivo, reza a seguinte oração:

**A - Todo corpo elástico é deformável, sob a ação de forças.**

**B - Todo corpo rígido é indeformável, sob a ação de forças.**

Uma propriedade dos corpos rígidos é a seguinte:

“O efeito de uma força sobre um corpo rígido não se altera, quando o ponto de aplicação dessa força desloca-se ao longo de sua direção”.

Desse modo, quando uma força, atua em qualquer ponto, numa mesma direção, num corpo rígido, o efeito é o mesmo.

Uma propriedade dos corpos perfeitamente elásticos e a seguinte:

“Ao imprimir uma força num corpo perfeitamente elástico, esse sofre uma deformação, e na ausência da força deverá retornar ao seu estado natural”.

Essa propriedade elástica permite verificar através do comportamento de uma mola de aço em espiral, que ela é um corpo elástico. Ao passo que uma pedra de diâmetro é um corpo rígido, pois sob a ação de forças não sofre deformações de nenhuma natureza.

Verifica-se experimentalmente que são exemplos de corpos elásticos:

**a** - molas de aço em espiral

**b** - molas helicoidais

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

- c - fios elásticos ideais
- d - gases em geral
- e - etc.

Os corpos rígidos tendem a fragmentar-se sob a ação de forças muito intensas. Isso significa que existe certo limite para a rigidez.

### **3. Estado Elástico da Matéria**

Habitua-se ao fato do corpo elástico se apresentar sob a forma de deformação ou sob a forma de restituição ao seu estado natural, podendo passar de uma situação para outra. Assim, a elasticidade ideal distingue-se sob duas fases:

#### **Fase de Deformação**

A fase de deformação é a fase em que ocorre propriamente dito, a deformação; ou seja, a fase iniciada no momento em que se aplica uma força no corpo e termina quando ele sofre a deformação máxima, dentro dos limites elásticos.

#### **Fase de Restituição**

A fase de restituição é a fase em que ocorre a restituição; ou seja, aquela iniciada a partir da máxima deformação e que se prolonga até o momento em que o corpo retorna ao seu estado natural.

A fase de restituição ocorre quando a força deformatória é retirada do corpo, e este devido a sua elasticidade, retorna ao seu estado natural. As fases de deformação e restituição constituem os estados elásticos da matéria. Portanto, de um modo geral, os cor-

pos elásticos existentes podem ser encontrados em dois estados: em fase de restituição ou em fase de deformação.

Desse modo no estado natural o corpo elástico não se encontra sob nenhuma ação de forças e possui volume, comprimento e forma bem definida e constante.

Já na deformação ou na restituição, o corpo não possui volume ou comprimento bem definidos e assume a forma modelada pela força que lhe é impressa. Esses estados assumidos pelos corpos elásticos são explicados exclusivamente pela ação de forças de restaurações e de deformações. Desse modo, conclui-se generalizadamente que a força altera a forma dos corpos. Em última análise, a mudança de forma ou volume de um corpo, sob a ação de forças externas é determinada pelas forças resultantes entre suas moléculas.

#### **4. Tipos de Elasticidade**

Pode-se observar experimentalmente que, ao prender um corpo elástico por uma de suas extremidades a um plano horizontal fixo, e ao aplicar na outra extremidade uma intensidade de força, o corpo sofrerá uma deformação e, no entanto poderá ou não restituir-se.

Este fato leva a dividir e classificar a elasticidade em três classes distintas.

**a) Primeira Classe:** “Elasticidade Perfeita”- Uma deformação é denominada de elasticidade perfeita quando, retirada a força que deforma o corpo, este retorna à sua posição inicial. Nos mesmos termos, posso escrever que a elasticidade perfeita é a propriedade pela qual um corpo se deforma sob a ação de uma força e retorna à sua forma inicial ao cessar a ação da força deformadora.

**b) Segunda Classe:** “Elasticidade Parcial”- Entende-se por elasticidade parcial quando, retirada a ação da força que deforma um

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

corpo elástico, este não se restitui totalmente à sua posição inicial, restituindo-se somente em parte.

**c) Terceira Classe:** “Elasticidade Plástica”- Entende-se por elasticidade plástica quando, retirada a ação da força que deforma o corpo, este não se restitui à sua posição inicial, mas continua em sua nova forma depois de cessada a ação da causa deformadora. Ou seja, a deformação é permanente.

Uma mola de chumbo em espiral é um corpo cinelástico; isto é, possui elasticidade plástica, pois ao ser imprimida por uma dada intensidade de força, sofre uma deformação e na ausência dessa força, não restitui-se.

## 5. Índice de Restituição Elástica

Pode-se demonstrar experimentalmente que as deformações e a restituições elásticas são verificadas pela seguinte igualdade:

$$l_2 - l_1 = a \cdot (L_2 - L_1)$$

Onde ( $L_1$ ) e ( $L_2$ ) são as deformações dos corpos sob a ação de forças ( $l_1$ ) e ( $l_2$ ) as respectivas deformações na fase de restituição depois de cessada a ação da força e a grandeza “a” é chamada de “índice de restituição elástica” e é uma grandeza adimensional. O valor de “a” depende da elasticidade dos corpos.

**a = deformação na ausência de forças (restituição)/deformação na presença de forças (deformação)**

Simbolicamente:

$$a = l_2 - l_1 / L_2 - L_1$$

Porém, como  $(\Delta L = L_2 - L_1)$  e  $(\Delta l = l_2 - l_1)$ , pode-se expressar o índice de restituição do seguinte modo:

$$a = \Delta l / \Delta L$$

Isso permite afirmar que o índice de restituição elástica é igual ao quociente da variação da restituição, inversa pela variação da deformação.

O índice de restituição “a” é um número puro; isto é, desprovido de unidade, podendo ainda ser expresso em termos de porcentagem. Verifica-se então o campo de variação de “a”, de acordo com cada uma das classes de elasticidade:

### **Elasticidade Perfeita**

A elasticidade perfeita é caracterizada pelos corpos elásticos ideais, a fase de deformação  $(L_2 - L_1)$ , tem módulo igual à fase de restituição  $(l_2 - l_1)$ . Portanto,  $(a = 1)$  nesses corpos elásticos.

### **Princípio da Conservação Elástica**

O princípio da conservação elástica é um dos mais primitivos princípios de conservação, sobre o qual se fundamenta a elasticidade. Os resultados que pude obter a partir de experiências realizadas com deformações elásticas me permitiram compor o seguinte enunciado. Antes, porém, é absolutamente necessário introduzir o conceito de sistema elasticamente isolado, que se define como sendo todo aquele sistema de deformações de elasticidade perfeita. Isto posto, passa-se ao enunciado do princípio da conservação elástica:

“Em um sistema elasticamente isolado, a soma algébrica das deformações e restituições é constante”.

*Leandro Bertoldo*  
*Elasticidade, Vol. V, Conceitos Gerais*

Para exemplificar o referido princípio, considere um corpo perfeitamente elástico (A), sob a ação de uma força provocando uma deformação ( $\Delta L$ ). Admita que, de certo modo, ocorreu a ausência de força no corpo deformado; e, seja ( $\Delta l$ ), a restituição elástica.

De acordo com o princípio da conservação elástica, a variação da deformação na presença da força é igual à restituição, quando ocorre a ausência da força.

$$\Delta L = \Delta l = \text{constante}$$

Ou seja:

$$\Delta L - \Delta l = 0$$

A conservação elástica parece sugerir que as deformações e as restituições dos corpos elásticos ideais não podem ser destruídas ou criadas.

Entretanto, na realidade, uma força muito intensa pode aproximar as deformações nos limites elásticos e nesses casos a restituição é parcial, entretanto a diferença da restituição para a deformação é muito pequena e considera-se como praticamente nula. E desse modo continua sendo válido o princípio da conservação elástica. Outro caso semelhante ocorre quando uma força é mantida aplicada no corpo elástico durante um longo período de tempo.

### **Elasticidade Parcial**

No caso das deformações parcialmente elásticas ( $\Delta l < \Delta L$ ) (a fase de restituição do sistema é sempre menor que a fase de deformação, sendo que o índice de restituição se encontra compreendido no intervalo aberto 0-1).

$$0 < a < 1$$

Neste sistema, obrigatoriamente não ocorre a conservação elástica.

### **Elasticidade Plástica**

Na situação das deformações dos corpos cinelásticos, a fase de restituição não existe e conseqüentemente, o índice de restituição é nulo.

$$a = 0$$

Resumindo tem-se:

$$0 \leq a \leq 1$$

## **6. Presença da Elasticidade**

Os fenômenos das deformações elásticas são extremamente abundantes na natureza. Por isso mesmo, para efeito de estudo, são classificados em cinco grandes classes. E são as seguintes:

- a) Elasticidade de Madeiras
- b) Elasticidade de Resinas
- c) Elasticidade de Gases
- d) Elasticidade de Metais
- e) Elasticidade Biológica

### **Elasticidade da Madeira**

Não existe dúvida alguma que elasticidade da madeira tenha sido uma das primeiras a ser observada pelo homem. E a maior prova do que afirmo encontra-se em uma pintura em rocha, encontrada numa caverna norte-africana, cuja origem é do final da